SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

SURIETTIVITA' GLOBALE ANALITICA E GEVREY DELL'OPERATORE $D_2 + ix_2^{2k}D_1$

4 MAGGIO 1989

In questo seminario presento un risultato contenuto in un lavoro [3] in collaborazione con L. Zanghirati.

TEOREMA. *Sia* $\mathscr{E}^{\{s\}}(R^n)$, $s\geq 1$, $n\geq 2$, *lo spazio di tutte le funzioni* $f\in C^\infty(R^n)$, *tali che per ogni compatto* $K\subset R^n$ *esiste una costante* $A>0$ *tale che*

$$\sup_{x\in K}\ \sup_{\alpha\in Z_+^n} A^{-|\sigma|}\alpha!^{-s}|\partial_x^\alpha f(x)| < +\infty.$$

Allora per ogni $s\geq 1$ *e qualunque sia l'intero* $k\geq 0$

i) $$(D_2+ix_2^{2k}D_1)\,\mathscr{E}^{\{s\}}(R^2) = \mathscr{E}^{\{s\}}(R^2),$$

ii) $$(D_2 + ix_2^{2k}D_1)\,\mathscr{E}^{\{s\}}(R^3) \neq \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3)\ ,\ D_j = -i\partial_{x_j}\ ,\ j = 1,2.$$

Se k=0 l'operatore considerato è l'operatore di Cauchy-Riemann ed il risultato enunciato si trova già in [2], ove è provato più in generale che

(*) $$P(D_1,D_2)\,\mathscr{E}^{\{s\}}(R^2) = \mathscr{E}^{\{s\}}(R^2)\ ,$$

per ogni s razionale ≥ 1[1)] e per ogni operatore differenziale lineare $P(D_1,D_2)$ con coefficienti costanti.

La dimostrazione del risultato enunciato utilizza:

a) un teorema di H. Komatsu [6] che fornisce una generalizzazione del teorema di Cauchy-Kovalevskaja per dati e soluzioni in spazi di Gevrey;
b) il fatto che con il cambiamento di variabili

---

1) Per s=1 questo risultato si trova in [4] (si veda anche [1]); per s reale si veda [9].

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^{2k+1}/(2k+1) \end{cases}$$

ci si può ridurre a considerare un operatore con coefficienti costanti (l'operatore di Cauchy-Riemann);

c) la ben nota suriettività da $C^\infty(R^n)$ su $C^\infty(R^n)$ di ogni operatore differenziale lineare con coefficienti costanti;

d) la s-Gevrey ipoellitticità in R^2 dell'operatore considerato per ogni $s \geq 1$ [2].

Dimostrazione del teorema

Sia $f \in \mathscr{E}^{\{s\}}(R^2)$, $s \geq 1$ e sia $\sigma > \max(s,1)$. Poiché $f \in \mathscr{E}^{\{\delta\}}(R^2)$, dal teorema di [6] segue che esiste $v_1 \in \mathscr{E}^{\{\sigma\}}(R^2)$ tale che

$$(1)\qquad \begin{aligned} & v_1(x_1,0) = 0 \\ & \partial_x^\gamma[(D_2+ix_2^{2k}D_1)v_1(x_1,x_2)-f(x_1,x_2)](x_1,0) = 0 \quad \forall \gamma \in Z_+^2 \,,\ x_1 \in R. \end{aligned}$$

sia

$$(2)\qquad h(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)-(D_2+ix_2^{2k}D_1)v_1(x_1,x_2) \quad , \quad (x_1,x_2)\in R^2$$

e con le nuove variabili

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^{2k+1}/(2k+1), \end{cases}$$

---

[2] Si veda [7] per s=1 e [8] per s>1.

$$g(y_1,y_2) = \begin{cases} h(y_1,[(2k+1)y_2]^{1/(2k+1)})[(2k+1)y_2]^{-2k/(2k+1)} & , \ y_2 \neq 0 \\ 0 & y_2 = 0 \end{cases}$$

Per (1) $g \in C^\infty(R^2)$ e quindi, per la suriettività da $C^\infty(R^2)$ su $C^\infty(R^2)$ di ogni operatore differenziale lineare con coefficienti costanti, esiste $w \in C^\infty(R^2)$ tale che

$$(D_{y_2} + iD_{y_1})w(y_1,y_2) = g(y_1,y_2) \quad \forall (y_1,y_2) \in R^2 .$$

Posto

$$v_2(x_1,x_2) = w(x_1, x_2^{2k+1}/(2k+1)) \quad , \quad (x_1,x_2) \ R^2,$$

è evidentemente

$$v_2 \in C^\infty(R^2)$$

e

$$(3) \qquad (D_2+ix_2^{2k}D_1)\, v_2(x_1,x_2) = x_2^{2k} g(x_1,x_2^{2k+1}/(2k+1)) = h(x_1,x_2).$$

Da (2) e (3) segue allora che

$$(D_2 + ix_2^{2k}D_1)(v_1+v_2) = f \quad \text{su} \quad R^2 ,$$

con

$$v = v_1 + v_2 \in C^\infty(R^2).$$

La s-Gevrey ipoellitticità su R^2, per ogni $s \geq 1$, dell'operatore $D_2+ix_2^{2k}D_1$, ci con

sente anzi di concludere che, di più, $v \in \mathscr{E}^{\{s\}}(R^2)$ come f. Ciò prova la i) del teorema.

Per provare ii), sia $f \in \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3)$, $s \geq 1$, e

$$g(x_1,x_2,x_3) = f(x_1, x_2^{2k+1}/(2k+1), x_3)x_2^{2n} \quad , \quad (x_1,x_2,x_3) \subset R^3.$$

Poiché $g \in \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3)$, se fosse

$$(4) \qquad (D_2+ix_2^{2k}D_1)\ \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3) = \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3),$$

esisterebbe $w \in \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3)$ tale che

$$(D_2 + ix_2^{2k}D_1)w = g \quad \text{su} \quad R^3.$$

La funzione $v(x_1,x_2,x_3) = w(x_1,[(2k+1)x_2]^{1/(2k+1)},x_3)$ sarebbe allora una soluzione in $\mathscr{D}'(R^3)$ dell'equazione

$$(D_2 + iD_1)v = f.$$

Per la parziale ipoellitticità in R^3 rispetto alle variabili (x_1,x_2) dell'operatore D_2+iD_1, in forza del Corollario del teorema 4.1.2 di [5], è in effetti $v \in \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3)$. Da (4) seguirebbe allora che

$$(D_2+iD_1)\ \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3) = \mathscr{E}^{\{s\}}(R^3) \quad , \quad s \geq 1,$$

ciò che tuttavia è falso come provato in [2].

E' immediato il

Corollario. *Per ogni* m *intero* > 0 *è*

$$(D_2+ix_2^{2k}D_1)^m\ \mathscr{E}^{\{s\}}(R^2) = \mathscr{E}^{\{s\}}(R^2), \quad \forall s \geq 1.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] K.G. ANDERSSON, Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic functions. Coll. on Analysis, Rio de Janeiro 1972, Analyse fonctionelle, Hermann 1974.

[2] L. CATTABRIGA, On the surjectivity of differential polynomials on Gevrey spaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Fasc. speciale per il Convegno "Linear partial and pseudo-differential operators", Torino, 30 sett.-2 ott. 1982, 41 (1983), 81-89.

[3] L. CATTABRIGA, L. ZANGHIRATI, Global analytic and Gevrey surjectivity of the Mizohata operator $D_2+ix_2^{2t}D_1$, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8).

[4] E. DE GIORGI, L. CATTABRIGA, Una dimostrazione diretta dell'esistenza di soluzioni analitiche nel piano reale di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti, Boll. Un. Mat. Ital. (4) (1971), 1015-1027.

[5] J. FRIBERG, Estimates for partially hypoelliptic differential operators, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 17 (1963), 1-93.

[6] H. KOMATSU, An analogue of the Cauchy-Kowalevsky theorem for ultradifferentiable functions and a division theorem as its dual, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 26 (1979), 239-254.

[7] S. MIZOHATA, Solutions nulles et solutions non analytiques, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962), 271-302.

[8] L. RODINO, On linear partial differential operators with multiple characteristics, Proceedings Conf. on Partial Differential Equations, Holzhan (GDR), 1988, Teubner-Text zur Mathematik.

[9] G. ZAMPIERI, An application of the fundamental principle of Ehrenpreis to the existence of global Gevrey solutions of linear differential equations, Boll. Un. Mat. Ital. (6) VB (1986), 361-392.